ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Хайитова Хилола Гафуровна
Преподаватель кафедры «Математического анализа», Бухарского государственного университета,
Mail: x.xayitova@mail.ru
Нажмиддинова Маржона Бахриддин кизи
студент Бухарского государственного университета.

Аннотация. *В данной статье представлены одно из основных понятий дифференциального исчисления — линейные интегральные уравнения, а также некоторые методы их решения. Рассматриваются также методы решения интегральных уравнений типов Фредгольма и Вольтерры. Анализируется теорема Фредгольма и её приложения.*

Ключевые слова: *интегральное уравнение, ядро, симметричная функция, линейное пространство.*

FREDHOLM'S THEOREM AND ITS APPLICATION

Khaitova Khilola Gafurovna
teacher of the Department of Mathematical Analysis, Bukhara State University,
Mail: x.xayitova@mail.ru
Nazhmiddinova Marzhona Bakhriddin kizi
student of Bukhara State University.

Annotation. *This article presents one of the fundamental concepts of differential calculus—linear integral equations—as well as some methods for solving them. Methods for solving Fredholm- and Volterra-type integral equations are also considered. Fredholm's theorem and its applications are analyzed.*

Key words: *integral equation, kernel, symmetric function, linear space.*

Мы перейдем теперь к рассмотрению уравнений фредгольма второго рода с ядрами, подчиненными условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty$$

(обеспечивающему компактность оператора), но без условия симметрии. Предположим сначала, что рассматривается уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)dt + f(s) \tag{1}$$

ядро которого-вырожденное, т.е. имеет вид

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) Q_i(t) \tag{2}$$

где P_i, Q_i −функции из L_2. Оператор с ядром вида (2) переводит всякую функцию $\varphi \in L_2$ в сумму

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\, \varphi(t) dt,$$

т.е. в элемент конечномерного подпространства, порожденного функциями $P_i, i = 1,2,3, \dots, n$. Заметим, что в выражении (2) функции $P_1, P_2, \dots . P_n$ можно считать линейно независимыми между собой. Действительно, если это не так, то, представив каждую из функций P_i как линейную комбинацию независимых, мы получим, что то же самое ядро $K(s,t)$ можно записать в виде суммы меньшего числа слагаемых вида $\tilde{P}_j(s)\tilde{Q}_j(t)$, так что функции $\tilde{P}_j$ линейно независимы. Аналогичную редукцию можно проделать для функций $\tilde{Q}_j$. Как легко видеть, после этих редукций получится ядро, в котором и P_j и Q_i будут между собой линейно независимы. Итак, будем решать уравнение (1) с вырожденным ядром (2), в котором функции $P_1, P_2, \dots . P_n$ (так же как и $Q_1, Q_2, \dots . Q_n$) линейно независимы. Подставив в уравнение (1) вместо $K(s,t)$ соответствующую сумму, получим

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\, \varphi(t) dt + f(s) \tag{3}$$

Введя обозначения

$$\int_a^b Q_i(t)\, \varphi(t) dt = q_i,$$

перепишем уравнение (3) в виде

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

Подставив это выражение для φ в уравнение (1), получим

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(t) + f(t)\right] dt + f(s). \tag{4}$$

Положив

$$\int_a^b Q_i(t)\, P_j(t) dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t)\, f(t) dt = b_i,$$

запишем равенство (4) так:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i + b_i\right].$$

Функции P_i, по предположению, линейно независимы, поэтому отсюда следует равенство соответствующих коэффициентов:

$$q_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i + b_i\,, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Мы получили для коэффициентов q_i систему линейных уравнений. Решив её, мы найдем функцию

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению (1), поскольку все выкладки, с помощью которых мы пришли от уравнения (1) к системе (5), можно проделать в обратном порядке. Итак, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению соответствующей ему системы (5) линейных алгебраических уравнений.

Для систем линейных уравнений хорошо известны условия существования и единственности решений.

I. Система линейных алгебраических уравнений

$$Tx = y \ \ (T = \|a_{ik}\|, \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n\,), \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n\,))$$

разрешима в том и только том случае, когда вектор y ортогонален каждому решению сопряженной однородной системы

$$T^* z = 0 \quad (T^* = \|\overline{a_{\imath k}}\|).$$

II. Если детерминант матрицы T отличен от нуля, то однородное уравнение $Tx = y$ имеет при любом y одно и только одно решение. Если же детерминант матрицы T равен нулю, то однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевые решения.

III. Поскольку матрица T и сопряженная матрица T^* имеют один тот же ранг, однородные системы $Tx = 0$ и $T^* z = 0$ имеют одно и то же число линейно независимых решений.

В силу той связи, которая, как мы выяснили, существует между интегральными уравнениями с вырожденными ядрами и системами линейных алгебраических уравнений, эти утверждения можно рассматривать как тоеремы, относящиеся к решениям вырожденных интегральных уравнений. Мы покажем в этой статья, что, по существу, эти же теоремы имеютместо идля уравнений с произвольными (не обязательно вырожденными) ядрами. Однако, поскольку для невырожденных интегральных операторов такие понятия, как ранг матрицы и детерминант не имеют смысла, соответствующие теоремы нужно будет с формулировать так, чтобы эти понятия в них не участвовали.

Будем снова рассматривать уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)dt + f(s)$$

но теперь на его ядро будем накладывать лишь условие Гильберта-Шмидта

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 dsdt < \infty$$

(обеспечивающее компактность оператора), но не будем это ядро предполагать ни вырожденным, ни симметрическим. Нас будут интересовать условия разрешимости уравнения (1) и свойства его решений. При этом существенным для нас будет лишь свойство компактности оператора, отвечающего уравнению (1), а не его интегральное представление. Поэтому мы будем все дальнейшие рассмотрения вести для операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi + f \tag{6}$$

считая, что A —произвольный компактный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H. Положив $T = I - A$ (где I —единичный оператор), перепишем уравнение (6) в виде

$$T\varphi = f. \tag{7}$$

Будем наряду с этим уравнением рассматривать однородное уравнение

$$T\varphi_0 = 0 \tag{8}$$

и сопряженные уравнения

$$T^*\varphi = g, \tag{9}$$

$$T^*\varphi_0 = 0. \tag{10}$$

Связь между свойствами решений этих четырех уравнений устанавливается следующими теоремами Фредгольма.

I. Неоднородное уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения $T^*\varphi_0 = 0$.

II. (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ одно и только одно решение, либо однородное уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.

III. Однородные уравнения (8) и (10) имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.

Прежде чем приступать к доказательству этих теорем, заметим, что они справедливы для уравнений с симметрическим ядром. При этом в силу совпадения A и A^* теорема III становится тривиальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16 (2020), часть 2. С. 25-28.

2. Хайитова Х.Г., Рустамова Б.И. Метод обобщения при обучении математике в школе // Проблемы педагогики 51:6 (2020). С. 45-48.

3. X.G‘.Xayitova Oliy ta'lim muassasalarida "Funksional analiz" fanini o'qitishda muammoli ta'lim metodida foydalanish // Современная психология и педагогика: проблемы, анализ и результаты, 227-230.

4. K.Khayitova The domain of convergence of the double degree seriers of several variables of the complex numbers // Journal of Global Research in Mathematical Archives 6:11(2019), 55-57.

5. X.G‘.Xayitova O'rta maktab matematika kursida tub va murakkab sonlari o'qitishda taqqoslash metodidan foydalanish // Pedagogik mahorat. 5-son 2019-yil, 139-141.

6. X.G‘.Xayitova O'rta maktabda matematika fanini o'qitishda umumlashtirish metodining afzalliklari // Pedagogik mahorat. 5-son 2020-yil, 122-1241.

7. Хайитова Х.Г. Преимущества использовании метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.

8. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh., Panjaradagi ikki o’lchamli qo’zg’alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi. Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.

9. Хайитова Х.Г., О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.

10. Хайитова Х.Г., «Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики» Научный импульс №10(100). Часть 2, Москва 2023 г.