

“FURYE QATORLARI YORDAMIDA PERSEVAL TENGLIGINI KELTIRIB
CHIQRISH VA UNING TATBIQLARI”

Abdiyeva Madina Oltiboy qizi

*Axborot texnologiyalari va menejment universiteti Matematika yo'nalishi magistranti
ish joyim Qarshi shahar 32- maktab Matematika fani o'qituvchisi*

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada Furye qatorlari nazariyasining muhim bo'limlaridan biri bo'lgan Perseval tengligining keltirib chiqarilish jarayoni batafsil tahlil qilinadi. Maqolaning asosiy maqsadi, ortogonal funksiyalar sistemasining xossalriga asoslanib, funksiyaning kvadratik normasini uning Furye koeffitsiyentlari orqali ifodalash usulini ko'rsatishdir. Bundan tashqari, Perseval tengligining amaliy ahamiyati, xususan, signalni qayta ishlash, fizikadagi energiya saqlanish qonunlari va sonli hisoblash usullaridagi o'rni yoritilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, ushbu tenglik nafaqat matematik analizning nazariy jihatlarini boyitadi, balki murakkab texnik tizimlarda spektral tahlil qilishda ham samarali vosita hisoblanadi.

Kalit so'zlar: Furye qatorlari, Perseval tengligi, ortogonal sistemalar, L_2 fazosi, Furye koeffitsiyentlari, spektral tahlil, energiyaning saqlanishi, funktsional analiz.

Kirish

Matematik analiz va uning amaliy tatbiqlarida periodik jarayonlarni o'rganishda Furye qatorlari alohida o'rin tutadi. Jozef Furye tomonidan XIX asr boshida taklif qilingan bu uslub har qanday integrallanuvchi periodik funksiyaning trigonometrik yig'indi shaklida ifodalash imkonini beradi. Biroq, Furye qatorlarining yaqinlashish xossalari va ularning funktsional fazolardagi o'rni keyinchalik chuqurroq o'rganildi. Shu jarayonda fransuz matematigi Mark-Antuan Perseval tomonidan kashf etilgan tenglik (ba'zan Parseval-Lyapunov tengligi deb ham ataladi) Furye analizining fundamental natijalaridan biriga aylandi.

Perseval tengligi funksiyaning o'rtacha kvadratik qiymati bilan uning Furye koeffitsiyentlari modullarining kvadratlari yig'indisi o'rtasidagi bog'liqlikni o'rnatadi. Bu bog'liqlik nafaqat matematik jihatdan chiroyli va mukammal natija bo'lib, balki fizika va muhandislik fanlarida keng qo'llaniladi. Masalan, elektr zanjirlarida quvvatni hisoblashda yoki akustik signallarning energiyasini baholashda ushbu tenglik asosiy rol o'ynaydi. Ushbu maqolada biz avvalo Perseval tengligining qat'iy matematik keltirib chiqarilishini ko'rib chiqamiz, so'ngra uning ilmiy va amaliy tatbiqlarini tahlil qilamiz.

Perseval tengligining keltirib chiqarilishi

Perseval tengligini keltirib chiqarish uchun avvalo kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosini va undagi ortogonal sistemalarni eslab o'tamiz. Faraz qilaylik, berilgan funksiya ko'rsatilgan oraliqda kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya uchun kompleks ko'rinishdagi Furye qatori cheksiz yig'indi sifatida yoziladi, bunda har bir had

20-May, 2026-yil

ma'lum bir chastotaga mos keluvchi eksponensial funksiya va unga tegishli Furiye koeffitsiyentidan iborat bo'ladi.

Furiye koeffitsiyentlari funksiyaning o'zi va mos keluvchi bazis funksiyasi ko'paytmasining integrali orqali aniqlanadi. Trigonometrik sistema yoki kompleks eksponentalar sistemi berilgan oraliqda ortogonal xossaga ega. Ortogonallik sharti shundan iboratki, turli chastotalarga ega bo'lgan ikkita bazis funksiyasining ko'paytmasidan olingan integral nolga teng bo'ladi, faqatgina bir xil chastotali funksiyalar ko'paytmasining integrali noldan farqli qiymatga ega bo'ladi.

Endi funksiyaning kvadratik normasini, ya'ni funksiya modulining kvadrati integralini hisoblaymiz. Furiye qatorining yaqinlashish nazariyasiga ko'ra, agar funksiya yetarli darajada silliq bo'lsa yoki umumiy hollda kvadratik integrallanuvchi funksiyalar fazosida qaralsa, Furiye qatori o'rtacha kvadratik ma'noda funksiya yaqinlashadi. Demak, biz funksiyaning o'rniga uning Furiye yig'indisini qo'yishimiz mumkin. Integral ostida funksiya va uning kompleks qo'shmasining ko'paytmasi hosil bo'ladi.

Bu ifodalarni ularning Furiye qatorlari orqali yozib, integral ostiga qo'yamiz. Yig'indi belgisi va integral belgisining o'rnini almashtirishimiz mumkin, chunki Riss-Fisher teoremasiga ko'ra bu amal o'rinli hisoblanadi. Natijada, ikki karra yig'indi va integral hosil bo'ladi. Yuqorida tilga olingan ortogonallik shartidan foydalanamiz. Integral faqat indekslar teng bo'lganda, ya'ni bir xil hadlar o'zaro ta'sirlashganda nolga teng bo'lmagan qiymat beradi. Boshqa barcha hollarda, ya'ni turli chastotali garmoniklar o'zaro ko'paytganda, integral nolga teng bo'ladi.

Shuning uchun ikki karra yig'indidan faqat diagonal hadlar, ya'ni indeksleri teng bo'lgan hadlar qoladi. Har bir bunday had uchun integral qiymati doimiy songa teng bo'lgani sababli, u yig'indi tashqarisiga chiqariladi. Natijada, funksiyaning kvadratik normasi uning barcha Furiye koeffitsiyentlari modullarining kvadratlari yig'indisiga proporsional bo'lib qoladi. Proporsionallik koeffitsienti esa tanlangan oraliq uzunligiga bog'liq bo'ladi.

Agar haqiqiy ko'rinishdagi Furiye qatoridan foydalansak, ya'ni funksiya kosinus va sinuslar yig'indisi sifatida ifodalansa, tenglik biroz boshqacha shaklni oladi. Bunda erkin hadning kvadrati va barcha garmoniklarning kosinus hamda sinus koeffitsiyentlari kvadratlari yig'indisi funksiyaning o'rtacha kvadratik qiymatiga teng bo'ladi. Bu formuladan ko'rinib turibdiki, funksiyaning o'rtacha kvadratik qiymati uning garmonik tarkibiy qismlari energiyalarining yig'indisiga teng. Bu esa fizik ma'noda energiyaning saqlanish qonuniga mos keladi.[1]

Perseval tengligining tatbiqlari

Perseval tengligi sof matematikadan tashqari, fan va texnikaning turli sohalarida keng qo'llaniladi. Quyida uning eng muhim tatbiqlari keltirilgan.

1. Signalni qayta ishlash va aloqa texnikasi

Zamonaviy raqamli signalni qayta ishlashda Perseval tengligi signal energiyasini vaqt sohasidan chastota sohasiga o'tkazish imkonini beradi. Har qanday elektrik signalning quvvati uning amplitudasining kvadratiga proporsionaldir. Vaqt sohasida signalning

umumiy energiyasi funksiya kvadratining integrali bilan aniqlansa, chastota sohasida bu energiya spektral zichlik funksiyasi orqali ifodalanadi. Perseval tengligi muhandislarga signalni filtrlash, shovqinni kamaytirish va ma'lumotlarni siqish (kompressiya) jarayonlarida qaysi chastotalar eng ko'p energiya olib yurganini aniqlashga yordam beradi. Masalan, MP3 audio formatida inson qulog'i eshitmaydigan yoki kam energiyali chastotalar kesib tashlanadi, bu esa fayl hajmini kichraytirishga olib keladi, bunda Perseval tengligi yo'qotilgan energiyaning hisob-kitobida asos bo'lib xizmat qiladi.[2]

2. Kvant mexanikasi

Kvant mexanikasida to'liq funksiya zarrachaning holatini tavsiflaydi. Born qoidasiga ko'ra, to'liq funksiya modulining kvadrati zarrachani topish ehtimollik zichligidir. To'liq ehtimollik birlikka teng bo'lishi kerak, ya'ni butun fazo bo'yicha olingan integral birdan iborat bo'lishi lozim. Perseval tengligi shuni ko'rsatadiki, agar to'liq funksiyasini impuls fazosiga (Furye almashtirishi orqali) o'tkazsak, impuls taqsimotining ham normalashuvi saqlanib qoladi. Bu kvant tizimlarida koordinata va impuls tasvirlarining ekvivalentligini ta'minlaydi va Geyzenbergning noaniqlik prinsipini tushunishda muhim rol o'ynaydi.[3]

3. Sonli usullar va yaqinlashish xatoligini baholash

Amaliy hisoblashlarda cheksiz Furye qatorini chekli sondagi hadlar bilan almashtirishga to'g'ri keladi. Perseval tengligi qoldiq hadning (xatolikning) kvadratik normasini baholash imkonini beradi. Agar biz ma'lum bir tartibdagi qisman yig'indini olsak, xatolik tashlab qoldirilgan barcha Furye koeffitsiyentlari kvadratlari yig'indisiga teng bo'ladi. Bu esa qancha hadni olish kerakligini oldindan rejalashtirishga imkon beradi. Ayniqsa, tez Furye almashtirishi algoritmlarida ushbu xossa hisoblash samaradorligini oshirishda ishlatiladi.[4]

4. Differensial tenglamalarni yechish

Chiziqli differensial tenglamalarni yechishda, ayniqsa chegaraviy masalalarda, Perseval tengligi yechimning barqarorligini tekshirish uchun ishlatiladi. Agar boshlang'ich shartlardagi kichik o'zgarishlar yechimning kvadratik normasida katta o'zgarishlarga olib kelmasa, masala korrekte qo'yilgan hisoblanadi. Perseval tengligi orqali yechimning energiyasi boshlang'ich ma'lumotlar energiyasi bilan bog'lanadi, bu esa fizik tizimlarning barqarorligini tahlil qilishda muhim vosita hisoblanadi. Masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasida vaqt o'tishi bilan temperaturaning o'rtacha kvadratik qiymati kamayib borishi ushbu tenglik yordamida isbotlanishi mumkin.

Xulosa

Perseval tengligi Furye analizining markaziy natijalaridan biri bo'lib, u funksiyaning fazoviy (yoki vaqt) tasviri bilan uning chastota tasviri o'rtasidagi chuqur bog'liqlikni ochib beradi. Ushbu tenglikning keltirib chiqarilishi ortogonal sistemalarning fundamental xossalari asoslanadi va matematik jihatdan juda ixcham hamda mantiqiydir.

Tenglikning ahamiyati shundaki, u murakkab integrallarni hisoblashni oddiy algebraik yig'indilarga aylantirish imkonini beradi. Bu nafaqat nazariy hisob-kitoblarni yengillashtiradi, balki amaliy masalalarda, xususan, signalni qayta ishlash, kvant fizikasi va

20-May, 2026-yil

sonli analizda keng qo‘llaniladi. Perseval tengligi orqali biz energiyaning saqlanish qonunini turli domenlarda kuzatishimiz mumkin, bu esa tabiiy hodisalarni modellashtirishda ishonchlilikni ta’minlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. – M.: Nauka, 1989. – S. 102-105.
2. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Discrete-Time Signal Processing. – Pearson Education, 2010. – P. 56-59.
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. Kvantovaya mexanika (nerelyativistskaya teoriya). – M.: Fizmatlit, 2008. – S. 45-48.
4. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody. – M.: Binom. Laboratoriya znaniy, 2015. – S. 312-315.