ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Хайитова Хилола Гафуровна
Преподаватель кафедры «Математического анализа», Бухарского государственного университета,
Mail: x.xayitova@mail.ru
Исломова Гулноза Саъдулло кизи
студент Бухарского государственного университета.

Аннотация. *В данной статье приведены сжатие отображений и их приложения. Как известно, вопросы, связанные с существованием и единственностью решения уравнения при данных условиях, могут быть выражены в виде задачи о существовании и единственности неподвижной точки некоторого отображения в подходящих метрических пространствах. Среди признаков существования и единственности неподвижной точки самым простым и вместе с тем очень важным признаком является отображение, называемое принципом сжимающего отображения.*

Ключевые слова: *неподвижная точка, отображение, сжимающее отображение, полное метрическое пространство.*

THE PRINCIPLE OF CONTRACTING MAPPINGS AND THEIR APPLICATION

Khaitova Khilola Gafurovna
teacher of the Department of Mathematical Analysis, Bukhara State University,
Mail: x.xayitova@mail.ru
Islomova Gulnoza Sadullo kizi
student of Bukhara State University.

Annotation. *This article presents the contraction of mappings and their applications. As is well known, questions related to the existence and uniqueness of a solution to an equation under given conditions can be expressed as the problem of the existence and uniqueness of a fixed point of a mapping in suitable metric spaces. Among the tests for the existence and uniqueness of a fixed point, the simplest and at the same time most important test is the mapping known as the contraction principle.*

Key words: *fixed point, mapping, contraction mapping, complete metric space.*

Пусть $f: X \to X$ −отображение метрического пространства в себя.

Определение. *Точка $a \in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(a) = a$.*

Отсюда следует, что неподвижная точка есть решение уравнения $f(x) = x$. Уравнения такого вида возникают в различных приложениях. Одним из общих результатов, дающих достаточные условия существования неподвижной точки, является теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения.

Определение. *Отображение* $f: (X, \rho x) \to (X, \rho x)$ *называется сжимающим, если существует постоянная* $\alpha,\ 0 \le \alpha < 1$, *такая, что для любых* $x_1, x_2 \in X$ *выполняется неравенство*

$$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \alpha\rho(x_1, x_2). \tag{1}$$

Таким образом, сжимающее отображение есть отображение, удовлетворяющее условию Липщица с постоянной $\alpha < 1$. Из этого следует, что такое отображение всегда равномерно непрерывно, а значить, и непрерывно.

Заметим, что в формуле (1) число α не может быть отрицательным, значит, можно требовать только $\alpha < 1$.

Теорема Банаха. *В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Единственность неподвижной точки получаем независимо от полноты пространства. Пусть существует две неподвижные точки $a = f(a), b = f(b), a \ne b$. Тогда

$$0 < \rho(a, b) = \rho\big(f(a), f(b)\big) \le \alpha\rho(a, b) < \rho(a, b).$$

В результате получили противоречие.

Существование неподвижной точки докажем методом последовательных приближений. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и построим последовательность

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \dots \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots.$$

Покажем, что эта последовательность является последовательностью Коши. Оценим сначала расстояние между соседними членами:

$$\rho(x_k, x_{k+1}) = \rho\big(f(x_{k-1}), f(x_k)\big) \le \alpha\rho(x_{k-1}, x_k) = \alpha\big(f(x_{k-2}), f(x_{k-1})\big) \le \cdots$$
$$\le \alpha^k \rho(x_1, x_0).$$

Считая $m > n$ и применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m)$$
$$\le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1})\rho(x_1, x_0),$$

из этого следует, что

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n(1 - \alpha^{m-n})}{1 - \alpha}\rho(x_0, f(x_0)\,) \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\rho\big(x_0, f(x_0)\big).$$

Так как X −полное пространство, то последовательность Коши x_n сходится к некоторому элементу $a \in X$. Переходя в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$ к пределу (что основано в силу непрерывности функции f), получаем $a = f(a)$.

Следствие. Для любого начального приближения x_0 последовательные приближения $x_n = f(x_{n-1})$ сходятся к неподвижной точке a отображения f, причем справедлива оценка погрешности $\rho(x_n, a) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Указанная теорема дает простой способ построения приближенного решения уравнения $f(x) = x$. Укажем несколько случаев, когда решение уравнение $f(x) = x$ с не сжимающим отображением можно свести к рассмотрению сжимающих отображений.

Отображение f может оказаться сжимающим не на всем пространстве X, а на некотором подпространстве $M \subset X$. Чтобы к M, рассмотренному как самостоятельное метрическое пространство, применить принцип сжимающих отображений, надо поверить выполнение условия

$$f(M) \subset M.$$

Частный случай такой ситуации рассмотрен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполняется условия:*

1) X −полное метрическое пространство;

2) на котором шаре $B[x_0, r]$ отображение f является сжимающим с постоянной $\alpha < 1$;

3) $\rho\big(x_0, f(x_0)\big) \le (1-\alpha)r$. Тогда в шаре $B[x_0, r]$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения f.

Теорема. *Пусть X −полное метрическое пространство и не сжимающее отображение $f: X \to X$ таково, что его некоторая N −я итерация*

$$f_N(x) = \underbrace{f\Big(f\big(\ldots . f(x)\big)\Big)}_{N}$$

является сжимающим отображением. Тогда отображение f имеет, и притом единственную, неподвижную точку в X.

Замечание. В случае, если $f: X_0 \to X$ −сжимающее отображение неполного метрического пространства X в себя, то неподвижной точки может не существовать.

Пример. Пусть X −множество рациональных точек отрезка $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Отображение $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$ переводит X в X и является сжимающим, ноне имеет неподвижной точки в X.

Теорема. *Пусть $T = [a, b]$ и пусть $K(t, s, z)$ −непрерывная функция переменных t, s, z удовлетворяющая условию Липшица по z, то есть существует постоянная величина L такая, что*

$$|K(t, s, z_1) - K(t, s, z_2)| \le L|z_1 - z_2|.$$

Если выполнено неравенство $L(b - a) < 1$, то интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds + y(t), \quad t \in [a, b],$$

имеет, и притом единственное, непрерывное решение для любой непрерывной функции $y(t)$.

Доказательство. Зафиксируем пространство $\mathrm{C}[a, b]$. Это пространство полное. Нетрудно показать, что формула

$$\big(F(x)\big)(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds + y(t)$$

определяет отображение пространства $\mathrm{C}[a, b]$ в себя.

Проверим, что отображение F сжимающее. Используя условие Липшица, получаем

$$|F(x_1)(t) - F(x_2)(t)| \leq \int_a^b K(t,s,x(s))ds + y(t) \int_a^b |K(t,s,x_1(s)) - K(t,s,x_2(s))| \leq L\int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leq L(b-a)\rho(x_1,x_2),$$

из этого следует, положив $\alpha = L(b-a) < 1$, получаем, что

$$\rho\big(F(x_1), F(x_2)\big) = \max_{a\leq t\leq b} |F(x_1) - F(x_2)| \leq L(b-a)\rho(x_1,x_2).$$

Так как $\alpha < 1$, то отображение F −сжимающее. Тогда согласно теорема Банаха, существует, и притом единственная, неподвижная точка отображения F, то есть существует, и притом единственное, решение $x(t)$ интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16 (2020), часть 2. С. 25-28.

2. Хайитова Х.Г., Рустамова Б.И. Метод обобщения при обучении математике в школе // Проблемы педагогики 51:6 (2020). С. 45-48.

3. X.G'.Xayitova Oliy ta'lim muassasalarida "Funksional analiz" fanini o'qitishda muammoli ta'lim metodida foydalanish // Современная психология и педагогика: проблемы, анализ и результаты, 227-230.

4. K.Khayitova The domain of convergence of the double degree seriers of several variables of the complex numbers // Journal of Global Research in Mathematical Archives 6:11(2019), 55-57.

5. X.G'.Xayitova O'rta maktab matematika kursida tub va murakkab sonlari o'qitishda taqqoslash metodidan foydalanish // Pedagogik mahorat. 5-son 2019-yil, 139-141.

6. X.G'.Xayitova O'rta maktabda matematika fanini o'qitishda umumlashtirish metodining afzalliklari // Pedagogik mahorat. 5-son 2020-yil, 122-1241.

7. Хайитова Х.Г. Преимущества использовании метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.

8. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh., Panjaradagi ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi. Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.

9. Хайитова Х.Г., О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.

10. Хайитова Х.Г., «Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики» Научный импульс №10(100). Часть 2, Москва 2023 г.