IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH VA TURINI ANIQLASH BO 'YICHA MISOLLAR VA ULARNING TURLI YECHIMLARI

Xurozboyeva Sevinch Abror qizi
Samarand davlat pedagogika pedagogika instituti
Aniq va Amaliy fanlar fakulteti
Amaliy matematika yo'nalishi 205-guruh talabasi

Annotatsiya: *Mazkur maqolada analitik geometriya kursining muhim bo'limlaridan biri bo'lgan ikkinchi tartibli egri chiziqlar tenglamalarini klassik va zamonaviy usullar yordamida kanonik shaklga keltirish masalalari tadqiq etilgan. Maqolada koordinatalar sistemasini almashtirish hamda invariantlar nazariyasiga asoslangan soddalashtirish algoritmlari amaliy misollar va ularning batafsil yechimlari orqali ko'rsatib berilgan.*

Kalit so'zlar: *ikkinchi tartibli chiziqlar, kanonik shakl, invariantlar nazariyasi, koordinatalarni almashtirish, ellips va giperbola, parabola xossalari, geometrik modellashtirish.*

Umumiy tenglamalarni soddalashtirish

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

Biz ushbu maqolada umumiy (1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni turini aniqlash va uni kanonik ko'rinishga keltirish bilan shug'ullanamiz. Shuningdek, biz avval ikkinchi tartibli chiziqning o'zi bilan tanishib chiqamiz.

Ta'rif: x va y o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlanadigan chiziqlar ***ikkinchi tartibli chiziqlar*** deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziqlar arxitektira, astronomiya, mexanikada hamda fan va texnikaning boshqa bo'limlarida kata rol o'ynaydi. Ikkinchi tartibli chiziqlarni uch guruhga ajratish mumkin:

1) Yagona simmetriya markaziga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziqlar
2) Bu gurhga simmetriya markaziga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar kiradi.
3) Uchinchi guruhga simmetriya markazi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan chiziqlarni kiritamiz.

$x^2 + y^2 = r^2$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq markazi (0:0) nuqtada bo'lgan radiusi r ga teng bo'lgan aylanani, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ markazi koordinatalar boshida bo'lgan ellipsni, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama bilan berilgan giperbolani, $y^2 = 2px$ parabolani aniqlaydi.

Ikki o'zgaruvchili ikkinchi darajali umumiy tenglama berilgan bo'lsin:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

Yuqoridagi tenglamada a_{11} va a_{22} bir vaqtda nolga teng bo‘lishi mumkin emas. Bundan bilish mumkinki, yuqorida ko‘rilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarning kanonik tenglamalari (1) tenglamaning xususiy xoli ekan.

1) $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{22}=1$, $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=-r^2$ bo‘lganda (1) tenglama $x^2 + y^2 = r^2$ ko‘rinishni oladi ya’ni bu tenglama aylanani aniqlaydi.

2) $a_{11} = \frac{1}{a^2}, a_{12} = 0, a_{22} = \frac{1}{b^2},$ $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=-1$ da (1) tenglama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsni aniqlaydi.

3) $a_{11} = \frac{1}{a^2}, a_{12} = 0, a_{22} = -\frac{1}{b^2},$ $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=-1$ da (1) tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolani aniqlaydi.

4) $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 1,$ $a_{13}=-p$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$ da (1) tenglama $y^2 = 2px$ ko‘rinishga ega bo‘ladi, va demak, parabola tenglamasi bo‘ladi.

Yuqoridagi almashtirishlardan shunday xulosaga kelish mumkin: demak, umumiy ko‘rinishda berilgan ixtiyoriy ikkinchi tartibli egri chiziqni kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin. Umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni kanonik holatga keltirish bilan shug‘ullanamiz. Agar ikkinchi tartibli egri chiziq biror R koordinatalar sistemasida (1) tenglamalar sistemasida berilgan bo‘lsa, u holda koordinatalar sistemasini biror burchakka burish natijasida **R** to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga o‘tish mumkin. (1) tenglamada $a_{12} \neq 0$ bo‘lsa, chiziqning $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ xarakteristik tenglamasini tuzamiz va uning ildizlari λ_1, λ_2 ni topamiz. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ formula bo‘yicha, $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}}, cosa = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}}$ larni hisoblaymiz. Yuqoridagilar bilan koordinatalar sistemasini α burchakka burishdan hosil bo‘lgan $\left(o,\ i^{`}, j^{`}\right)$ reperning $i^{'}, j^{`}$ koordinata vektorlari aniqlanadi:

$i^{`} = icos\alpha + jsin\alpha \quad j^{`} = jcos\alpha - isin\alpha$

1) Yangi reperda chiziqning tenglamasi

$$\lambda_1 x^{`2} + \lambda_2 y^{`2} + 2a_{13}^{`}x^{`} + 2a_{23}^{`}y^{`} + a_{33} = 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi va bunda $a_{13}^{`}, a_{23}^{`}$ koeffitsiyentlarni quyidagi formulalar yordamida aniqlaymiz:

$$a_{13}^{`} = a_{13}cos\alpha + a_{23}sin\alpha,\ \ a_{23}^{`} = a_{23}cos\alpha - a_{13}sin\alpha.$$

Endi ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holatga keltirishning keyingi usuli bilan tanishamiz, bu usulimiz “invariantlar” usuli deb yuritiladi.

Ushbu

$I_1 = a_{11} + a_{12}$ (1)

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (2)

$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (3)

Biz yuqorida keltirib o‘tgan ifodalar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini boshqa koordinatalar sistemasiga almashtirishga nisbatan ikkinchi tartibli1 chiziqlarning invariantlari deyiladi va bu yerda har doim $a_{12} = a_{21}$ $a_{31} = a_{13}$ $a_{32} = a_{23}$ ifodalar o‘rinlidir. Endi biz yuqoridagi invariantlarga ko‘ra ikkinchi tartibli chiziqning turini va kanonik tenglamasini aniqlaymiz. Yuqoridagi invariantlar uchun xarakteristik tenglama keltiramiz va tenglamaga ko‘ra chiziqning turini aniqlaymiz. $\lambda^2 - \mathrm{I}_1\lambda + I_2 = 0$ bu tenglamaning λ_1 va λ_2 ildizlari haqiqiy sonlardan iborat. Ikkinchi tartibli chiziqlarni yuqorida aytganimizdek uch guruhga ajratish mumkin. Birinchi guruh yagona simmetriya markaziga ega bo‘lgan chiziqlar kiradi, ular ellips, mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to‘g‘ri chiziq, giperbola va kesishadigan 2 ta haqiqiy to‘g‘ri chiziq. Ikkinchi tartibli chiziq yagona markazga ega bo‘lishi uchun $I_2 \neq 0$ zarur va yetarlidir. Ikkinchi guruhga simmetriya markaziga ega bo‘lmagan chiziqlarni, ya’ni parabolani kiritamiz. Chiziqning parabola bo‘lishi uchun $I_2 = 0, K_3 \neq 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Uchinchi guruhga simmetriya markazlari to‘g‘ri chiziqni tashkil etadigan chiziqlarni kiritamiz, ular ikkita parallel to‘g‘ri chiziq, ustma-ust tushadigan ikkita to‘g‘ri chiziq. Ikkkinchi tartibli chiziqning simmetriya markazlari to‘g‘ri chiziqni tashkil etadigan bo‘lishi uchun $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirsh natijasida hosil bo‘lgan birinchi guruh chiziqlarining tenglamasini $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$. Ikkinchi guruh tenglamasini $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}x$=0.Uchinchi guruh tenglamasini $I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$ ko‘rinishga keltirishimiz mumkin. Ikkinchi tartibli chiziqlarning yuqorida keltirib o‘tgan guruhlarga tegishli bo‘lishning zaruriy va yetarlilik shartlarini ularning invariantlari o‘rtasidagi munosabatlar bilan quyidagicha ifodalanadi:

I.Ellipsni ifodalaydi agar $I_2 > 0,\ I_1, K_3 < 0$ shartlar bajarilsa, mavhum ellips $I_2 > 0,\ I_1, K_3 > 0$. Kesishadigan ikkita mavhum to‘g‘ri chiziq $I_2 > 0,\ K_3 = 0$

Giperbola $I_2 < 0,\ K_3 \neq 0$

II. Parabola $I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$

III. Ikki parallel to‘g‘ri chiziq $I_2 = 0,\ K_3 = 0\ ,\ K_2 > 0$

Ustma-ust tushadigan to‘g‘ri chiziq $I_2 = 0,\ K_3 = 0\ ,\ K_2 = 0$. Quyidagi misolni endi invariantlar usuli bilan kanonik ko‘rinishga keltiramiz;

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$$

Yechish: $a_{11} = 1, a_{22} = 4, a_{12} = a_{21} = -2, a_{13} = a_{31} = -3,$ $a_{23} = a_{23} = 4, a_{33} - 6,\ I_1 = a_{11} + a_{12} = 1 + 4 = 5$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 24 + 24 - 36 + 24 - 16 = -4$$

Demak, $I_2 = 0,\ K_3 \neq 0$ parabola tenglamasini ifodalar ekan, endi berilgan tenglamani kanonik holatga keltiramiz.

$$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}x = 0; \leftrightarrow 5y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{-4}{5}}x = 0$$

$5y^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x = 0 \leftrightarrow y^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}\ x$ yuqoridagi tenglama bilan bir xil kanonik ko‘rinishga keldi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR;

1. S.V. Baxvalov, P.S. Modenov, A.S. Parxomenko. “Analitik geometriyadan masalalar to‘plami”
2. N.D. Dodajonov, M.Sh. Jo‘rayeva. “Geometriya”
3. T.N. Qori-Niyoziy. “Analitik geometriya asosiy kursi”
4. A.Y. Narmanov. “Analitik geometriya”
5. X.R. Latipov, Sh.I.Tojiyev, R.Rustamov. “Analitik geometriya va chiziqli algebra”
6. Р.Н.НАЗАРОВ., Б.Т.ТОШПУЛАТОВ, А.Д.ДУСУМБЕТОВ. АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ ,II кисм. Тошкент, «Ўқитувчи». 1975й.