

UCHBURCHAKNING YUZINI HISOBLASHGA OID ASOSIY FORMULALAR VA  
ULARNING ISBOTLARI

**Xurozboyeva Sevinch Abror qizi**

*Samarqand davlat pedagogika instituti*

*Amaliy matematika yo‘nalishi*

*205-guruh talabasi*

*Ilmiy rahbar: Abdullayev Abubakir Narzullayevich*

**Annotatsiya:** *Mazkur maqolada uchburchak yuzasini hisoblashning fundamental formulalari hamda ularning qat‘iy matematik isbotlari tahlil qilingan. So‘nggi yillarda fan olimpiadalari va nufuzli tanlovlarda formulalarning kelib chiqishi hamda ularning nostandart qo‘llanilishiga oid topshiriqlar ko‘p uchrayotganini inobatga olgan holda, mavzuning nazariy va amaliy jihatlari tizimli ravishda yoritib berilgan.*

**Kalit so‘zlar:** *uchburchak yuzasi, geometrik isbotlar, Geron formulasi, fan olimpiadalari, balandlik va mediana, trigonometrik usul, yuzalar nazariyasi, invariant xossalari.*

**Uchburchak**-bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va uchlari shu nuqталarda bo‘lgan uchta kesmadan yasalgan figura. Berilgan nuqtalar uchburchakning uchlari, uchlarini tutashtiruvchi kesmalar uchburchakning tomonlari, tomonlari orasidagi uchta burchaklar esa uchburchakning burchaklari deyiladi. Geometriyada uchburchak uch qirrali va uchta cho‘qqidan tashkil topgan uch qirrali ko‘pburchakdir. Uchburchakning eng muhim xususiyati shundaki, uchburchakning ichki burchaklarning yig‘indisi 180 gradusga tengligidir. Bu xususiyat uchburchakning burchak yig‘indisi xossasi deyiladi. Agar ABC uchburchak bo‘lsa, u  $\triangle ABC$  sifatida belgilanadi va bu yerda A, B va C uchburchakning uchlari. Yuqorida aytib o‘tganimizdek, uchburchak ko‘pburchakning bit turi bo‘lib, uning uch tomoni bor va ikki tomoni uchi birlashtirilib, uchburchakning cho‘qqisi deyiladi. Ikki tomon o‘rtasida esa burchak hosil bo‘ladi. Bu geometriyaning muhim qismlaridan biridir. Pifagor teoremasi va trigonometriya kabi ba‘zi asosiy tushunchalar uchburchak xususiyatiga bog‘liq. Uchburchak burchaklari va tomonlariga qarab har xil turlarga ega.

**Uchburchakning burchaklari**-uchburchakda uchta burchak bor. Bu burchaklar uchburchakning uch tomoni deb nomlanuvchi umumiy nuqtada uchrashadigan ikki tomondan hosil bo‘ladi. Agar yon uzunligini tashqariga uzatsak, u holda tashqi burchak hosil bo‘ladi. Uchburchakning ketma-ket ichki va tashqi burchaklarining yig‘indisi to‘ldiruvchidir.

**Uchburchakning xususiyatlari.** Matematikada har bir shakl ularni bir-biridan ajratib turadigan o‘ziga xos xususiyatlarga ega.

- Uchburchakning uch tomoni va uchta burchagi bor.
- Uchburchak burchaklarining yig‘indisi har doim 180 gradusga teng.
- Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ikkita ichki burchaklar yig‘indisiga teng.

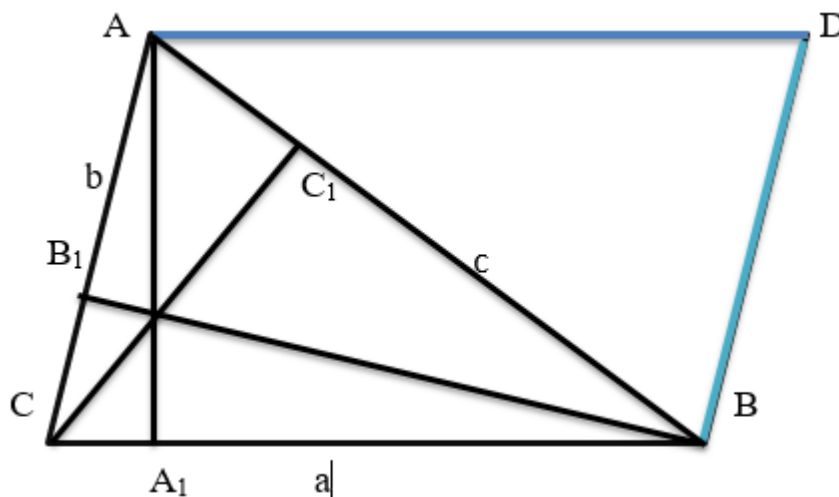
- Uchburchakning tashqi burchaklari yig'indisi 360 gradusga teng
- Uchburchakning istalgan ikki tomonining uzunliklari yig'indisi uchinchi tomonining uzunligidan kata. Xuddi shunday, uchburchakning istalgan ikki tomoning uzunliklari orasidagi farqi uchinchi tomoning uzunligidan kichikdir.

• Eng qisqa tomon har doim eng kichik ichki burchakka qarama-qarshidir. Xuddi shunday, eng uzun tomon har doim eng kata ichki burchakka qarama-qarshidir.

Geometriyada eng muhim tushunchalardan biri bo'lgan uchburchakning yuzi masalasiga to'xtalamiz. Haqiqatan yuza tushunchasi juda ham muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa uchburchakning yuzini topishga oid bir qancha ifodalar mavjud. Bu ifodalar yordamida uchburchakning yuzasini hisoblash mumkin. Berilgan ifodalar turli ko'rinishda bo'ladi va ulardan foydalanishda uchburchakning turiga va berilgan parametrlariga e'tibor qaratiladi.

**Teorema.** Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng.

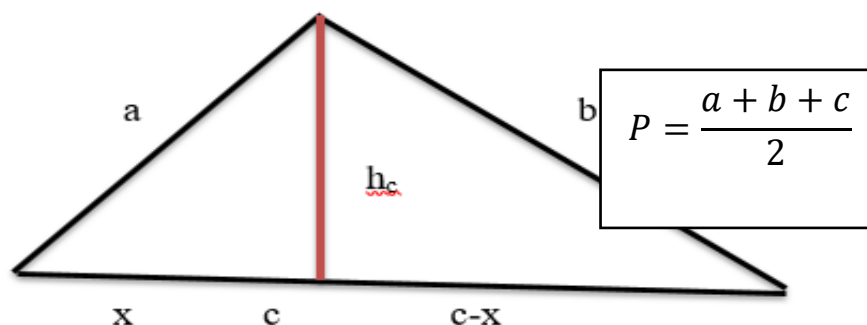
**Isboti.** Bizga ABC uchburchak berilgan bo'lsin.



ABC uchburchakni AD BC parallelogramgacha to'ldiramiz, bizga ma'lumki parallelogramning yuzi  $S_{AD BC} = CB \cdot AA_1 = a \cdot a_h$  bo'ladi. Parallelogramning diagonali uni ikkita teng yuzali uchburchakka ajratganligi uchun, ABC uchburchakning yuzi parallelogram yuzining yarmiga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{AD BC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ . Teorema isbot bo'ldi.

Shuningdek, bu formulaning isbotini to'g'ri to'rtburchak misolida ham ko'rishimiz mumkin. Asosiy tushuncha: Uchburchak unga tashqi chizilgan to'g'ri to'rtburchakdan ikki marta kichik bo'lganligi sababli uchburchakning yuzasi asos va balandlikning ko'paytmasining yarmiga teng. Uchburchakning yuzini hisoblashda yana ko'plab formulalardan foydalaniladi. Biz quyida bir nechta formulalarning isbotini keltirib o'tamiz.

Biz juda ham ko‘p foydalaniladigan Geron formulasi isboti bilan tanishamiz. Tomonlar  $a$   $b$   $c$  bo‘lgan uchburchak berilgan bo‘lsin.  $c$  tomonga  $h_c$  balandlik



tushuramiz.

Endi bizga noma'lum bo‘lgan  $x$  ni qolgan uchta tomon orqali ifodalaymiz. Pifagor teoremasiga ko‘ra:

$$h_c^2 + x^2 = a^2$$

$h_c^2 + (c - x)^2 = b^2$  endi bu sistemani yechish uchun birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz.

$$h_c^2 + x^2 - h_c^2 - c^2 - 2cx - x^2 = a^2 - b^2$$

$$2cx = a^2 - b^2 + c^2 \quad x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

$$h_c^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2$$

$$h_c^2 = \left(a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right) \cdot \left(a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)$$

$$h = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 - c^2 + 2ac}{2c}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}{2c}}$$

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - (a - c)^2 \cdot (a + c)^2 - b^2}$$

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(b - a + c) \cdot (b + a - c) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b + c)}$$

$$h = \frac{1}{2c} \cdot 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{b + c - a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + c - b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + b - c}{2}\right)}$$

$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{\left(\frac{a + b + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - c\right)}$$

$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Endi yuqoridagi ta'rifga ko‘ra uchburchakning yuzi asosiga tushirilgan balandlik bilan asosning ko‘paytmasiga teng.

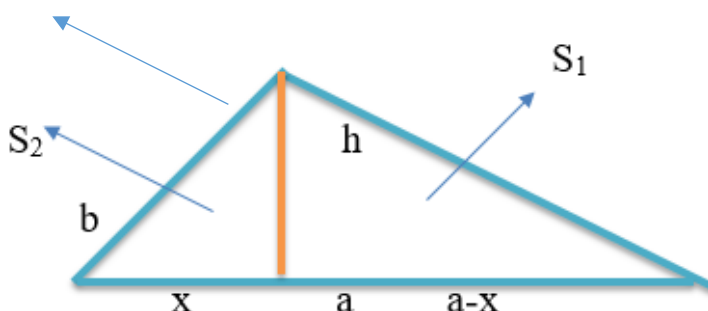
$$S = c \cdot \frac{h}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Demak, formula isbotlandi.

Uchburchak yuzini berilgan ikki tomon oʻrtasidagi burchak yordamida hisoblash.

$$S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \alpha$$

Bizga tomonlari a va b boʻlgan uchburchak berilgan boʻlsin.



Bizga berilgan a va b tomonlar oʻrtasidagi burchak  $\alpha$  boʻlsin. Uchburchakning yuzi

$$S_1 + S_2 = S_{\Delta}$$

$$S_1 = \frac{x \cdot h}{2} \quad S_2 = \frac{(a-x) \cdot h}{2} \quad h = b \cdot \sin \alpha \quad S_{\Delta} = S_1 + S_2$$

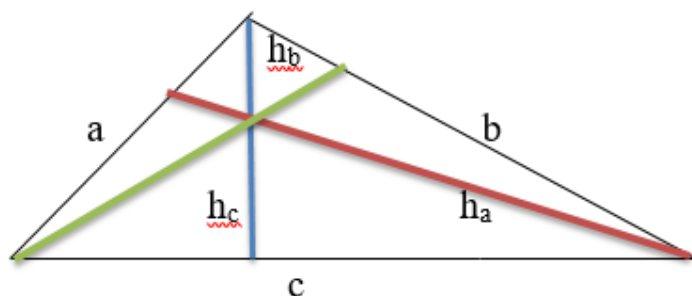
$$S_{\Delta} = \frac{h \cdot x}{2} + \frac{(a-x) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$h = b \cdot \sin \alpha$  ekanligidan foydalansak, formula isbotlandi.

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin \alpha$$

Uchburchak yuzini uning balandliklari berilganda hisoblash.

Bizga tomonlar a b va c boʻlgan uchburchak berilgan boʻlsin.



Bu yerda  $h_a$ ,  $h_b$  va  $h_c$  mos a b va c tomonlarga tushirilgan balandliklar.

10-Iyun, 2026-yil

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$a = \frac{2S}{h_a} \quad b = \frac{2S}{h_b} \quad c = \frac{2S}{h_c}$$

Endi biz uchburchakni yuzini hisoblashda Geron formulasidan foydalanamiz.

$$S = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)}$$

Bu yerda almashtirishlardan foydalanamiz ya'ni:

$$\frac{a}{2} = \frac{S}{h_a} \quad \frac{b}{2} = \frac{S}{h_b} \quad \frac{c}{2} = \frac{S}{h_c}$$

endi bu ifodalarni yuqoridagi formulaga qo'yamiz.

$$S = \sqrt{\left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c}\right)\left(\frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_a}\right)\left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_c} - \frac{S}{h_b}\right)\left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} - \frac{S}{h_c}\right)}$$

Kelib chiqqan formuladan S larni umumiy ko'paytuvchi qilib qavsdan tashqariga chiqaramiz va soddalashtirishlarni amalga oshiramiz.

$$S = S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

Berilgan ifodadan S ni topsak,

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}$$

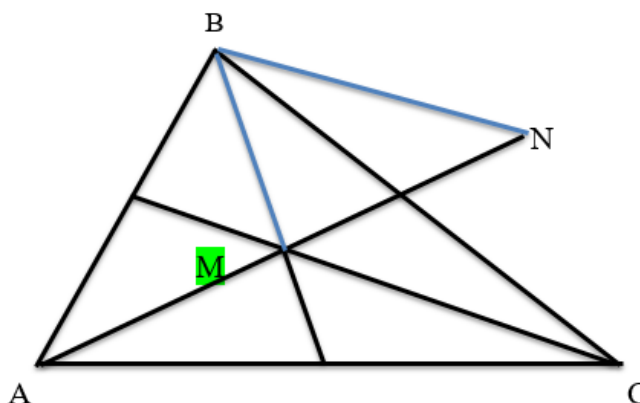
demak, formula isbot bo'ldi.

Bizga ABC uchburchak berilgan bo'lib uning yuzini topish talab etilsin.

Berilgan: uchburchakning mos tomonlariga tushirilgan medianalar. Demak, uchburchakning yuzini medianalariga ko'ra topish uchun formuladan foydalanamiz.

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

Bu formulani isbotlash uchun bizga ABC uchburchak berilgan bo'lsin. Uning tomonlariga mos ravishda  $m_a$   $m_b$   $m_c$  medianalarni o'tkazib, medianalar kesishgan M nuqtani BC tomonning o'rtasiga nisbatan simmetrik ko'chiraylik. Quyidagi chizmada BMNC to'rtburchak va BMN uchburchak paydo bo'ladi.



10-Iyun, 2026-yil

BMN uchburchakning tomonlari mos ravishda

$$BM = \frac{2}{3}m_b \quad BN = \frac{2}{3}m_c \quad MN = \frac{2}{3}m_a \text{ o'lchamlarga ega.}$$

ABC uchburchakning BC tomoni BMN uchburchakni ikkita tengdosh shakllarga ajratadi. BMN uchburchakning yuzini Geron formulasi yordamida topamiz.

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

$$\begin{aligned} S_{BMN} &= \sqrt{p \left(p - \frac{2}{3}m_a\right) \left(p - \frac{2}{3}m_b\right) \left(p - \frac{2}{3}m_c\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{m_a + m_b + m_c}{3} \cdot \frac{m_a + m_b - m_c}{3} \cdot \frac{m_b + m_c - m_a}{3} \cdot \frac{m_a + m_c - m_b}{3}} \\ &= \frac{1}{9} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)} \end{aligned}$$

Agar  $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$  ko'rinishida belgilash kiritsak ushbu ifoda hosil bo'ladi.

$$S = \frac{4}{9} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

BMN uchburchakning yuzining yarmi ABC uchburchak yuzining  $\frac{1}{6}$  qismiga teng ekanligidan

$$S_{ABC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)} = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

#### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. “Geometriya: keng qamrovli kurs” Den Peode.
2. “Elementlar” (geometriya bo'yicha klassik asar) Evklid
3. “Matematik olimpiadalarda Evklid geometriyasi” Evan Chen.
4. “Planimetriyadan hisoblashga va isbotlashga doir tanlangan masalalar” Obid Karimiy “O'qituvchi” nashriyoti. Toshkent-1965y.